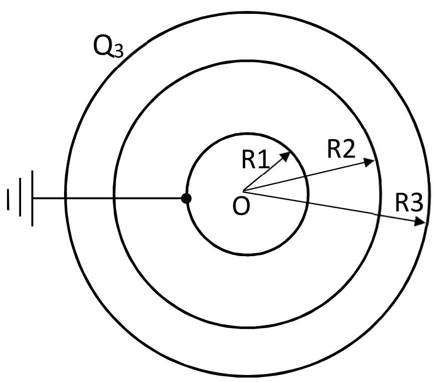
Esercizio n.1 [10 punti]

Si consideri il sistema composto da tre superfici sferiche concentriche conduttrici di raggi **R1, R2, R3** (vedi figura). Sulla superficie della sfera di raggio **R3** è depositata una carica **Q_3**. A) Fare un grafico qualitativo, in funzione della distanza dal centro O, del vettore campo elettrico e del potenziale elettrostatico nelle quattro zone in cui è diviso lo spazio. Si assumano come nulli i potenziali all'infinito.



La parte esterna della superficie di raggio **R1** viene quindi collegata a massa tramite un filo sottile che passa attraverso le altre superfici senza toccarle.

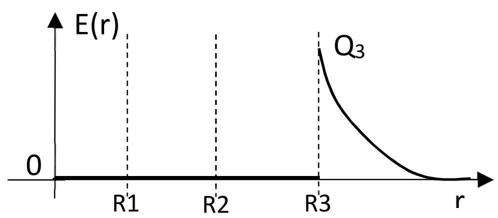
B) Fare un grafico qualitativo del vettore campo elettrico e del potenziale in tutte le quattro zone in cui è diviso lo spazio per il sistema globale dato dalla carica Q_3 e con la massa collegata alla superficie **R1**. C) In queste condizioni si calcoli il valore del potenziale elettrostatico sulla superficie della sfera di raggio **R3**.

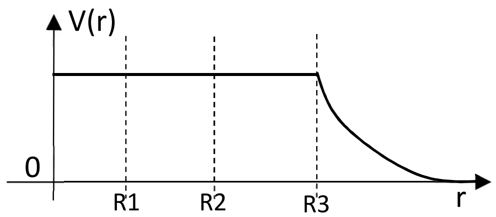
Dati: R1= 1 cm ; R3= 3 cm ; Q_3 = 2 nC

Per "grafico qualitativo" si intende un grafico in cui si mostrano gli andamenti delle funzioni con i segni ed i limiti corretti.

Soluzione

A) L'unica carica del sistema è Q_3 che crea un campo elettrico diverso da zero fra R3 e infinito ($\propto 1/r^2$) e un potenziale costante per r<R3. NOTA: Q_3 NON può creare un campo elettrico all'interno, basta applicare il teorema di Gauss a qualunque superficie sferica con $r<R_3$.

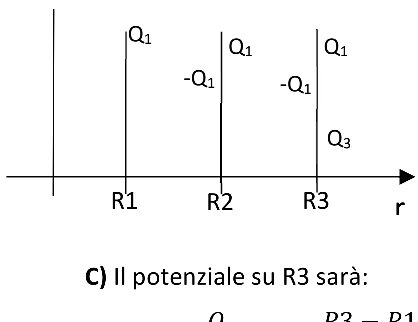




B) Per risolvere correttamente l'esercizio è necessario considerare che mettere la superficie R1 a massa vuol dire imporre che il potenziale di R1 sia zero, ma comporta anche uno spostamento di cariche dalla massa verso la superficie o viceversa, tale da portare il suo potenziale a zero. Dato che il potenziale dovuto a Q3 è positivo, la carica che si deposita su R1, che proviene dalla massa, deve essere negativa. Se non fosse chiaro si veda la discussione dettagliata sul Mencuccini- Silvestrini (pag.89) di cosa succede mettendo a massa una superficie sferica.

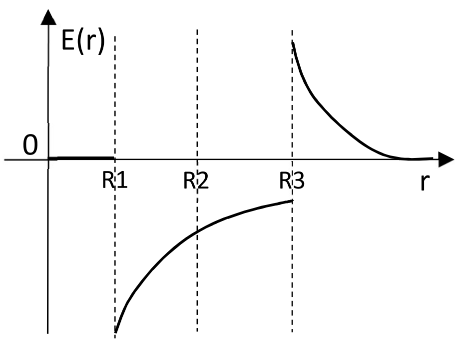
Quindi: $V(R1) = V(Q_3)_{R1} + V(Q_1)_{R1} = 0 \;\rightarrow\; V(Q_3)_{R1} = -V(Q_1)_{R1} \rightarrow k\frac{Q_3}{R3} = -k\frac{Q_1}{R1}$ da cui: $Q_1 = -Q_3\frac{R1}{R3} < 0$

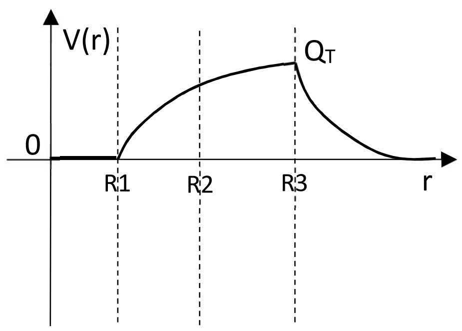
Sulle varie superfici si avranno quindi le cariche disposte come in figura:



Sulla superficie 3 la carica totale sarà: $Q_T = Q_3 + Q_1 = Q_3 - Q_3\frac{R1}{R3} = Q_3\left(1 - \frac{R1}{R3}\right) = Q_3\frac{R3-R1}{R3} > 0$

Campi e potenziali, essendo additivi, saranno:





C) Il potenziale su R3 sarà:

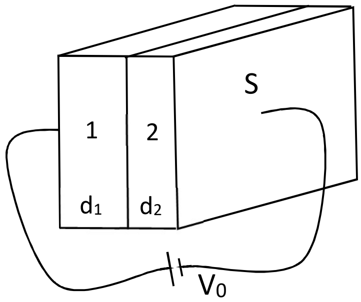
$$V_3 = k\frac{Q_T}{R3} = kQ_3\frac{R3-R1}{R3^2} =$$

$$= 9\,10^9 \cdot 2\,10^{-9} \cdot \frac{2\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^{-4}} =$$

= 400 V $\therefore$

Esercizio n.2 [10 punti]

Consideriamo un condensatore piano collegato ad un generatore di f.e.m ideale V_0. Il condensatore, con le superfici di area S e spessore totale $d=d_1+d_2$, è composto da due diversi materiali 1 e 2, di costanti dielettriche ε_{r1} e ε_{r2} (vedi figura). Si calcoli, supponendo di non considerare gli effetti ai bordi, il valore della capacità del condensatore, la differenza di potenziale presente ai capi dei due materiali che costituiscono il sistema, e il valore del vettore D all'interno del materiale 1 e del materiale 2.



Dati: $d_1 = 3$ mm ; $d_2 = 1$ mm ; $\varepsilon_{r1} = 1$; $\varepsilon_{r2} = 5$; $S = 3\ m^2$; $V_0 = 200$ V

Soluzione

I due materiali **non** formano due condensatori (l'interfaccia fra 1 e 2 non è un conduttore, non c'è induzione completa) ma, nel calcolo della capacità del condensatore, possono essere trattati **come se** fossero due condensatori in serie, C_1 e C_2.

Abbiamo che:

$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S}{d_1} = \varepsilon_0 \cdot 10^3\ F$; $C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d_2} = \varepsilon_0 \cdot 15 \cdot 10^3\ F$

La capacità serie è quindi:

$$\therefore\ C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \varepsilon_0 \frac{15}{16} \cdot 10^3\ F \cong 9\ nF \quad \textit{[8,3 nF]}$$

La carica elettrica presente sulle armature esterne, sia di C1 che di C2, è: $|Q| = V_0 C \cong 200 \cdot 9 \cdot 10^{-9} \cong 1{,}8\ \mu C$

Da cui posso calcolare:

$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{V_0\, C}{C_1} = V_0 \frac{C_2}{(C_1+C_2)}$ mentre: $V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_2} = \frac{V_0\, C}{C_2} = V_0 \frac{C_1}{(C_1+C_2)} = V_0 - V_1$ che, inserendo i valori numerici, diventano:

$$\therefore\ V_1 = 200\ \frac{15}{16} \cong 188\ V\ [187{,}5\ V] \quad ; \therefore\ V_2 \cong 200 - 190 \cong 12\ V\ \ [12{,}5\ V]$$

Nota: la somma di V_1 e di V_2 **DEVE** essere uguale a V_0, anche con i valori approssimati.

Il vettore D, che dipende solo dalle cariche libere depositate sulle superfici esterne, è identico nei due materiali:

$$\therefore\ |\bar{D}| = \sigma = \frac{Q}{S} \cong \frac{1{,}8 \cdot 10^{-6}}{3} \cong 0{,}6\ \frac{\mu C}{m^2} \quad \left[0{,}58\ \frac{\mu C}{m^2}\right]$$

Esercizio n.3 [10 punti]

All'interno di un solenoide ideale realizzato con n spire per unità di lunghezza è disposta, nel vuoto, una spira quadrata di lato L e resistenza R disposta nel piano ortogonale all'asse del solenoide. Il solenoide è percorso da una corrente variabile nel tempo secondo la legge $I(t) = I_0\ \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Calcolare l'energia dissipata nella spira nell'intervallo di tempo [0,∞].

Dati: $n = 10^5\ m^{-1}$; $I_0 = 10$ A ; L = 1 cm ; R = 0,8 Ω ; τ = 1 ms

L'energia dissipata si calcola integrando la potenza dissipata nell'intervallo di tempo richiesto.

$E = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty R I_s^2(t)dt$ dove $I_s(t)$ è la corrente indotta nella spira dalla variazione del flusso del campo *$B=\mu_0 n\, I(t)$* nel solenoide.

$$I_s(t) = \frac{f_i}{R} = \frac{1}{R}\left(-\frac{d\phi(B)}{dt}\right) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(\mu_0 n\, I(t) L^2) = -\frac{\mu_0 n I_0 L^2}{R}\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{\mu_0 n I_0 L^2}{R}\left(\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}\right)$$

L'energia sarà quindi: $E = R\left(-\frac{\mu_0 n I_0 L^2}{R \cdot \tau}\right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{[\mu_0 n I_0 L^2]^2}{2 \cdot R \cdot \tau} = \frac{[4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}]^2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3}} = \frac{16 \cdot 10 \cdot 10^{-1}}{16 \cdot 10^{-4}} = 10^{-5} = 10\ \mu J \quad \therefore$

Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%.